Thème : Incertitude et utilisation des Connaissances

Calculs sous incertitude

Mots-clés : encadrement, calcul en intervalles, forme normale, extervalles, quatervalles

Louis FRECON

frecon@if.insa-lyon.fr

04.7243.8239 / 04.7272.7914 / 04.7885.2009

LEACM

ISH, 14 avenue Berthelot, F 69007 - Lyon

Dans la problématique des interactions entre incertitude et utilisation des connaissances, le *calcul en intervalles* peut apporter un éclairage pertinent.

L'incertitude et la connaissance partielle d'un système se matérialisent par la complexification de sa perception pouvant déboucher sur l'impossibilité d'une prise de décision : cas trop complexe, manque de temps pour étudier les éventualités… Si on veut coller à la réalité d'un système sans utiliser d'hypothèse probabiliste ou simplificatrice, la détermination de plages de travail de certaines variables, en respectant l'incertitude première du système, permet d'en borner les effets.

La discipline du calcul en intervalles facilite grandement la prise de décision (immédiate, tactique ou stratégique) uniquement par l'approfondissement de la maîtrise de l'incertitude (bornage de certaines variables), issue directement de l'utilisation de connaissances du décideur.

Tout en maintenant un pont entre le thème *Incertitude et utilisation des Connaissances,* et les techniques mathématiques nécessaires, ce texte a trois buts :

a) rappeler les règles d'hygiène à suivre pour tirer un maximum du calcul en **intervalles**, car les négliger rend les résultats médiocres ;

b) rappeler la notion d'**extervalle** (Aussenintervall) qui permet d'éviter certains incidents analytiques pour les formes en 1/x ;

c) introduire la notion de **quatervalle**, qui permettrait une approche plus réaliste et plus fine des valeurs obtenues, en distinguant les valeurs *possibles* des valeurs (considérées comme) *normales.*

Ce texte, relatif aux évaluations imparfaites, exploite la distinction entre opérateur idéal et opérateur calculable.

Calculs sous incertitude

I. Incertitude et encadrement

Lorsqu'on connaît partiellement un système, certaines variables semblent très incertaines. Si on élimine les cas des valeurs symboliques ou floues, reste l'incertitude sur des variables numériques. De fait, si on ne connaît pas leur valeur, on connaît souvent des bornes pour celle-ci ; les mêmes relations d'inégalité peuvent être considérées isolément comme vagues, alors qu'en les combinant entre elles ou avec des savoirs pragmatiques ou de sens commun, on peut obtenir un encadrement d'une précision inespérée, souvent suffisante pour une décision.

Généralement,

- $a \le x$, $b \le x$, $c \le x$ entraînent $\max(a, b, c) \le x$
- $x \le a$, $x \le b$, $x \le c$ entraînent $x \le \min(a, b, c)$

A. De l'inconnu à l'incertain : problème du Quadrilatère

On sait qu'un quadrilatère ABCD a pour côtés AB = 30, BC = 9, CD = 20, DA = 15. Quelle est la longueur des diagonales AC et BD ?

Nous n'en savons rien, même après quelques constructions à la règle et au compas. Cherchons au moins une indication sur ces valeurs, qui représentent des *distances*.

Pour leur encadrement, rappelons que les distances sont régies par l'inégalité du triangle, qui se note ici

$$CD \le Cx+xD \text{ et, par symétrie, } |Cx - xD| \le CD$$

D'où :

- Triangle ABC : $|AB - BC| \le AC \le AB+BC$, soit $21 \le AC \le 39$,
- Triangle ADC : $|AD - DC| \le AC \le AD+DC$, soit $5 \le AC \le 35$,

  et finalement **$22 \le AC \le 35$,**
- Triangle DAB : $|DA - AB| \le DB \le DA + AB$, soit $15 \le DB \le 45$,
- Triangle DBC : $|DC - CB| \le DB \le DC + CB$, soit $11 \le DB \le 29$,

  et finalement **$15 \le DB \le 29$**.

Ces encadrements ne préjugent pas du type du quadrilatère, gauche ou plan, concave ou convexe…

B. Circonscrire l'incertain : un Affrêtement

On devrait acheminer un certain nombre de caisses A et de caisses B. On peut frêter un transport T. Sa capacité introduit deux contraintes, en poids et en volume :

1) $a + 4b \leq 340$; poids

2) $2a + b \leq 260$; volumes

La facturation s'élèverait à $6a + 10b$, contre 200 unités de frais fixes. T doit-il être frêté ?

Pour cela, on s'impose une opération non-déficitaire :

3) $6a + 10b \geq 200$; admissibilité

Existe-t-il une combinaison linéaire de (1) et (2) permettant de juger de (3) ? En formant 2*(1) + 2*(2), on obtient :

2*(1) $2a + 8b \leq 680$

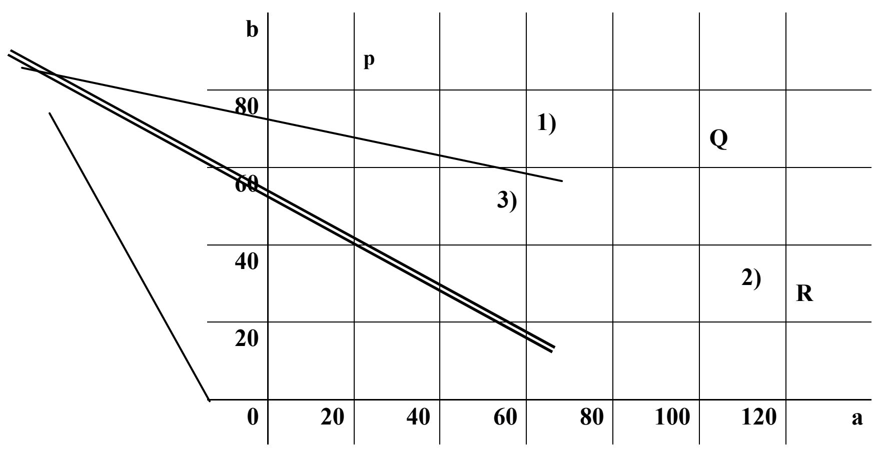
2*(2) $4a + 2b \leq 520$

(4) $6a + 10b \leq 1200$, ce qui montre que 3) est largement possible avec un bénéfice .

Finalement, les couples (a, b) admissibles sont tous contenus dans une région triangulaire PQR satisfaisant 1), 2) et 3), (cf. figure ci-après).

Le chargement optimal Q = (100, 60) fournit un gain

$$6a + 10b - 200 = 1200 - 200 = 1000$$



P = (20, 80) ; Q = (100, 60) ; R = (120, 20)

En termes de décision,

- Tout couple (a, b) au-dessus de 1) demande un second transport (trop lourd)
- Tout couple (a, b) au-dessus de 2) réclame un second transport (trop volumineux)
- Tout couple (a, b) au-dessous de 3) demande un complément de charge.
- Tout couple (a, b) de PQR implique un bénéfice déterminé par la droite parallèle à (3) passant par lui, d'autant plus important qu'elle est plus proche de l'optimum Q.

Ainsi ramène-t-on, pour deux variables l'ensemble des couples admissibles à un triangle ou polygone. Au-delà, avec plus de variables on construit l'ensemble des t-uples admisssibles, polytope défini, ayant au plus une face par contrainte, certaines étant éliminées car satisfaites *ipso facto* par la conjonction des autres.

II. Encadrement et Intervalles

A. Transcription d'un encadrement en intervalle

Tout encadrement par des valeurs peut être transcrit en intervalles : si x est connu tel que $1 \leq x \leq 3$, on considère l'intervalle [1 3] comme le *domaine* de la valeur de x.

Soit un intervalle $I = [a\ \ b]$; cela suppose que a et b sont deux valeurs d'un même ensemble ordonné, tel que $a \leq b$. On pose $\inf(I) = a$, $\sup(I) = b$, et on introduit une longueur de l'intervalle $lg(I) = |a - b|$, qu'on peut considérer comme une mesure d'incertitude.

Partant d'un ensemble V de valeurs ordonnées, on note alors **IV** l'ensemble des intervalles de V.

B. Conjonction d'encadrements

On a vu que

- $a \leq x$, $b \leq x$, $c \leq x$ entraînent $\max(a, b, c) \leq x$
- $x \leq a$, $x \leq b$, $x \leq c$ entraînent $x \leq \min(a, b, c)$.

Maintenant, si $a \leq x \leq b$, $c \leq x \leq d$, $e \leq x \leq f$, nous noterons plutôt $x \subseteq [a\ b]$, $x \subseteq [c\ d]$, $x \subseteq [e\ f]$, et donc $x \subseteq [a\ b] \cap [c\ b] \cap [e\ f] = [\max(a, c, e)\ \ \min(b, d, f)]$. (Voir §quadrilatère).

C. Calcul en intervalles

Lorsqu'on connaît partiellement un système, certaines variables sont considérées comme autonomes, d'autres, nommées par commodité, sont définies de façon indirecte par des expressions relatives aux premières.

Qu'advient-il des secondes lorsque les premières sont incertaines ? si l'on ne veut pas faire d'hypothèses probabilistes à ce sujet, il reste le calcul en intervalles[1]. De quoi s'agit-il ?

L'idée est simplement de bâtir un calcul analogue au calcul traditionnel, dont les variables pourraient avoir un intervalle comme valeur.

D. Opérateurs idéaux

Soient deux variables x et y ; si x et y ont pour valeurs des intervalles X et Y, que vaut x + y ? On pose naturellement :

$$\mathrm{Val}\,(x + y) \equiv \{\, \alpha + \beta \mid \alpha \in X,\ \beta \in Y \,\}$$

Et plus généralement pour un opérateur « op » :

$$\mathrm{Val}(\, x \text{ op } y \,) \equiv \{\, \alpha \text{ op } \beta \mid \alpha \in X,\ \beta \in Y \,\}.$$

E. Opérateurs calculables

Les définitions ci-dessus semblent naturelles, mais ne sont pas calculables en un temps fini dès lors qu'un intervalle de longueur finie a la puissance du continu.

On substitue donc en général à l'opérateur idéal « op » un opérateur calculable « [op] » . Par exemple on pose

$$\mathrm{Val}(\, x + y \,) \equiv X\,[+]\,Y \equiv [\inf(X) + \inf(Y), \sup(X) + \sup(Y)\,]$$

Et plus généralement

$$\mathrm{Val}(\, x \text{ op } y \,) \equiv X\,[\mathrm{op}]\,Y \equiv f_{op}\,(X, Y)$$

Où f_{op} est une fonction calculable des intervalles X et Y.

On s'attend à ce que les opérateurs concrets, choisis calculables, ne soient pas parfaits. On impose que, pour tout x, y :

$$\mathrm{Val}(\, x \text{ op } y \,) \equiv \{\, \alpha \text{ op } \beta \mid \alpha \in X,\ \beta \in Y \,\} \subseteq X\,[\mathrm{op}]\,Y \equiv f_{op}\,(X, Y)$$

---

[1] Interval analysis / intervall Rechnung.

Alors, [op] sera dit *admissible* pour op, et en constituera une *approximation par excès*.

D'autre part, si [op1] et [op2] sont admissibles pour op, [op1] sera dit *strictement préférable à* (ou *plus fin que*) [op2] si pour tout X et tout Y $\in$ **IR** :

$$X\,[op1]\,Y \subseteq X\,[op2]\,Y$$

Exemples.

1) Si X = [3 17] et Y = [5 12], alors X [+] Y = [8 29]

2) Si X = [3 17] et Y = [-17 -3], alors X [+] Y = [-14 14]

Ce dernier exemple est évidemment à opposer à X–X = 0.

F. Puissances

Les puissances impaires s'évaluent directement, les puissances paires de [a b] s'évaluent directement si l'intervalle ne contient pas 0, ou ne le contient que comme valeur limite.

Par contre, si [a b] = [a 0] $\cup$[0 b], alors $[a\ \ b]^{2k} = [0\ \ \max(-a, b)^{2k}]$. Une remarque similaire s'applique à chaque fonction paire (ch …)

Exemple 3.

$[-3\ \ 7]^3 = [-27\ \ 343]$; $[-3\ \ 7]^4 = [0\ \ 2401]$.

G. Opérations de choix

Les opérateurs min/ max recouvrent une idée de meilleur choix, déclinée soit en choix a priori, soit en choix opportuniste.

1. Choix a priori

On choisit au mieux un terme contre l'autre : choix de technologie (dallage contre plancher), d'itinéraire…. On aura toujours :

min([2 5] , [3 8]) = [2 5]

Par contre, on posera

min([2 8] , [3 5]) = [2 8] dans une ***approche optimiste***, où l'on accepte le risque de 8 pour bénéficier de 2 (stratégie du flambeur, itinéraire le plus rapide *si tout va bien*)

min([2 8] , [3 5]) = [3 5] dans une ***approche pessimiste***, où le pire est assez sûr, et où on s'occupe systématiquement de « minimiser le désastre » (stratégie de l'ingénieur) : on réduit le risque à 5, et tant pis pour un possible [2 3] (ex : itinéraire le plus rapide *si tout va mal*).

2. Choix opportuniste

On a par exemple deux recherches simultanées, et on attend le premier résultat. On aura toujours :

min([a b] , [c d]) = [min(a, c) min(b, d)]

III. Normalisation pour le calcul en intervalles

La différence entre *forme brute* et *forme adaptée* s'exprime par le

A. Principe de Nickel

« L'évaluation directe d'une expression n'est exacte que si toutes les variables sont indépendantes et n'ont qu'une seule occurrence ».

Corollaire :

Avant évaluation en intervalles, toute expression doit être mise sous une *forme normale*, où chaque variable :

- Est substituée jusqu'à ne faire apparaître que des variables indépendantes,
- Ne figure finalement qu'une seule fois.

Remarque.

On parle de forme normale plutôt que canonique car il n'y a pas unicité. x /(x+2) mène soit à 1 – 1/(x + 2), soit à 1/(1 + 2/x))

Exemple 4.

Considérons les expressions Z = 30 – Y et X = Y + 2*Z, avec Y = [4 7] ;

- en aveugle, Z =[23 26], et X = [4 7] + 2*[23 26] = [50 59], de longueur 9 ;

- en explicitant Z dans X il vient : $X = Y + 2*Z = Y + 60 – 2*Y = 60 – Y =$ [53 56], de longueur 3, ce qui montre bien l'influence malencontreuse de *variables de manœuvre inutiles*, qui masquent les dépendances.

B. Polynômes et fonctions rationnelles

Les polynômes et les fonctions rationnelles se heurtent à une difficulté : seuls les polynômes du second degré à une variable possèdent toujours une forme normale, de style

$$(ax + b)^2 + c$$

Exemples .

5) Soit un polynôme du second degré $y = x^2 – x + 4$ à évaluer pour X = [-3 7].
   - Une évaluation brute par $X*X – X + 4$ donnerait [-21 49] - [-3 7] + 4 = [-24 56] d'une longueur de 80.
   - Une évaluation de $X^2 – X + 4$ donnerait [0 49] - [-3 7] + 4 = [-3 50] , d'une longueur réduite à 53, sans corrélation des termes de degré 1 et 2
   - La normalisation donne $x^2 – x + 4 = (x^2 – x + 1/4) +15/4 = (x - 1/2)^2 + 15/4$ soit $[-7/2\ \ 6\ 1/2]^2 + 15/4 = [0\ \ 42\ 1/4] + 15/4 = [15/4\ \ 46]$, d'une longueur de 42,25 seulement.
6) Considérons le cas de (X + 1) / (X + 2) pour X = [1 3] ;
   - Sans précaution, on écrirait : X + 1 = [2 4] ; X + 2 = [3 5] ;
     (X + 1) / (X + 2) = [2/5 4/3] ; lg[2/5 4/3] = 14/15 ;
   - Il faut écrire : (X + 1) / (X + 2) = 1 – 1/(X + 2) ; X + 2 = [3 5] ;
     1/(X + 2) = [1/5 1/3] ; et (X + 1) /(X + 2) = 1 – 1/(X + 2) = [2/3 4/5] ;
     avec lg [2/3 4/5] = 2/15, la *réponse 7 fois plus précise ; mais surtout, réponse exacte*.
7) Considérons le cas de X·Y / (X + Y) pour X = [1 3] et Y = [2 4]
   - Sans précaution, on écrirait : X + Y = [3 7] ; X · Y = [2 12] ; d'où X · Y / (X + Y) = [2/7 4] ; lg[2/7 4] = 26/7 ;
   - Il faut écrire : X·Y / (X + Y) = 1/(1/X + 1/Y) = 1/ (1/[1 3] + 1/[2 4]) = 1/[7/12 3/2] = [2/ 3 12/7], avec lg([2/ 3 12/7])= 22/21, valeur 3,55 fois plus précise.

C. Cas quelconque : la bissection

Dans le cas des fonctions trop quelconques, dont la meilleure évaluation n'est pas prédictive, on recourt à la bissection. Pour une fonction f idéale, si I, I1 et I2 sont des intervalles tels que $I = I1 \cup I2$, alors

$$f(I) = f(I1) \cup f(I2) \subseteq F(I1) \cup F(I2) \subseteq F(I1 \cup I2) \subseteq F(I)$$

où F est une évaluation de f à base d'*opérateurs admissibles présumés localement exacts* (i.e. au moins sur des intervalles très petits).

Partant de F(I), $F(I1) \cup F(I2)$ est une valeur plus exacte (et la fragmentation de I est souhaitable) tant que $F(I1) \cup F(I2) \subset F(I)$; on peut arrêter si $F(I1) \cup F(I2) = F(I)$. Ce procédé peut d'abord être appliqué aux fonctions dites « monotones par morceaux » dont on segmente le domaine d'évaluation en sections disjointes où la fonction est monotone ; c'est ce que nous avons fait implicitement fit pour les fonctions paires …

Exemple 8.

$Ch([-3 \quad 7]) = Ch([-3 \quad 0]) \cup Ch([0 \quad 3]) \cup Ch([3 \quad 7]) = Ch([0 \quad 7])$ du fait de la parité…

D. Traitement en intervalles

Pour pratiquer le calcul en intervalles, qui n'est pas sans finesse pour tirer le meilleur d'une axiomatique affaiblie, on voit déjà qu'il faut utiliser avec soin une bibliothèque spécialisée dûment testée.

IV. Intervalles, Extervalles et Tervalles

Classiquement, on considère que 1/x n'est pas défini si X contient 0.

Cependant, si $y = x/(x-2)$, il n'y a de problème que pour $x = 2$; l'évaluation de la forme normale équivalente $1/(1-2/x)$ ne devrait pas donc poser de problème autour de x = 0…

A. Extervalles

L'inverse d'un intervalle $I = [a \quad b]$ est-il toujours défini ?

- Si $0 < a$ ($I \in I^+$), $1/I = [1/b \quad 1/a]) \in I^+$;
- De même, si $b < 0$ ($I \in I^-$), $1/I = [1/b \quad 1/a]) \in I^-$;

- Mais si $a < 0 < b$, alors $1/[a \quad b]) = [-\infty \quad 1/a]) \cup [1/b \quad +\infty]$; à ce stade, l'ensemble des intervalles n'est pas stable pour l'inversion, et on croit bien faire usuellement en replaçant cette valeur par $[-\infty \quad +\infty]$: la stabilité est sauve, au détriment de la signification . Risquons plutôt une extension algébrique modérée en utilisant un ***extervalle*** (Aussenintervall) , objet défini par

$$(>p \quad q<) \equiv [-\infty \quad p]) \cup [q \quad +\infty]$$

Alors, pour $a < 0 < b$:

$$1/[a \quad b]) \equiv (>1/a \quad 1/b<)$$

et symétriquement :

$$1/(>a \quad b<) \equiv [1/a \quad 1/b]).$$

B. Algèbre de Tervalles

On appellera ***tervalle*** un objet soit intervalle soit extervalle.

On appellera ***algèbre de tervalles*** la plus petite structure algébrique formée de tervalles et close pour les 4 opérations.

Exemple 9. Evaluation de $X/(X - 2)$ pour $X= [1 \quad 3]$

a) par $1/(1 - 2/X)$: $X = [1 \quad 3]$ $2/X = [2/3 \quad 2]$ $1 - 2/X = [-1 \quad 1/3]$
$1/(1 - 2/X) = (> -1 \quad 3<)$

b) par $1 + 2/(X - 2)$: $X = [1 \quad 3]$ $X - 2= [-1 \quad 1]$ $1/(X - 2) = (> -1 \quad +1<)$
$2/(X - 2) = (> -2 \quad +2<)$ $1+ 2/(X - 2) = (> -1 \quad 3<)$

… résultat que confirme l'étude analytique détaillée. Le calcul peut se poursuivre et, par exemple,

$1 /(1/2 + X/(X - 2))$ pour $X= [1 \quad 3]$ vaut $1/(1/2 + (> -1 \quad 3<)) = 1/ (> -1/2 \quad 7/2<) = [-2 \quad 2/7]$

C. Repli sur les Intervalles

En général, les extervalles n'ont de sens que comme intermédiaires de calcul, devant finalement nous ramener à des intervalles. (voir exemple ci-dessus)

L'apparition inopinée d'extervalles comme résultats peut alors être considérée comme *symptôme d'erreur.*

V. Le normal et le possible : Calcul en Quatervalles

A. Quatervalles

Pour les probabibilistes, une quantité incertaine est généralement soumise à une certaine distribution, ces distributions étant étudiées pour leurs propriétés, leurs combinaisons.

Dubois et Prade ont montré, d'un point de vue pratique, l'intérêt des distributions trapézoïdales. Sans entrer dans les détails, convenons d'appeler ***quatervalle*** une paire d'intervalles dont l'un est interne à l'autre.

[a [b c] d]

dénote une valeur de ce type, où [b c] est l'intervalle des valeurs normales, et [a d] l'intervalle des valeurs possibles. Ce concept est applicable par exemple à l'estimation d'un prix, de la durée d'un travail, d'une distance…

- [a [a b] b] sera la forme quatervalle de l'intervalle [a b] ,
- [a [b b] c] sera la forme quatervalle d'une distribution triangulaire.

B. Intervalle + Intervalle = Quatervalle ?

Si l'on veut mener un calcul en intervalles précis, en essayant de réserver la notation intervalle à des distributions rectangulaires, nous sommes amenés à poser :

[a b] + [c d] = [a+c [min(a+d, b+c) max(a+d, b+c)] b+d]

[2 5] + [3 8] = [5 [8 10] 13]

et pour des intervalles de I^+ :

[2 5] * [3 8] = [6 [15 16] 40]

C. min et max

Il faudra adapter ici les 3 cas vus en II.G. Sous une autre approche, Dubois & Prade appliquent ce genre de calcul à des choix budgétaires.

VI. Conclusion

Dans un système partiellement connu, certaines variables sont considérées comme autonomes, d'autres sont définies par des expressions relatives aux premières.

Si les premières sont incertaines, et si l'on ne veut pas ou ne peut pas faire d'hypothèses probabilistes à leur sujet, les secondes peuvent être cernées par le calcul en intervalles, peu connu et parfois sous-estimé. L'essentiel est de savoir le pratiquer avec audace et prudence :

- en empruntant à la littérature allemande des années 70 le concept complémentaire d'extervalle,
- en allant au-delà (quatervalles ou autres) dès qu'on a une expérience donnant une certaine intuition de ces approches.

VII. Remerciements

Je remercie Annick Van Box Som[2], Rémy Boyer[2] et Pierre Frécon[3] de leurs critiques constructives.

VIII. Bibliographie

Caplat G., *Techniques numériques et préparation formelle dans les problèmes aux intervalles,* Thèse de docteur-ingénieur, Université Lyon I (1978)

Caplat G., « Symbolic preprocessing in interval function computing » in *Symbolic and algebraic computation*, pp 369-382, Eurosam '79, Intern. symp. on symbolic and algebraic manipulation, Marseille, juin 1979, E.W. Ng ed., Lecture notes in computer sciences n°72, Springer Verlag, 1979.

Caplat G., « Encadrement de zeros de fonctions », in *Méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur*, 2e congr. int. G.A.M.N.I, Paris 1980, vol. 1, 155-162 (1980).

[2] Psychologue, LEACM

[3] Ingénieur civil des Mines de Paris, Butagaz

Caplat G., *Note sur la representation d'intervalles complexes*. Freiburger Intervall-ber. 81/6, 43-47 (1981)

Caplat G., Commerçon J.C., « Identification by interval analysis », International conf. *On system engineering* , Coventry 1980.

Caplat G., Frécon L., « Specifications for interval programming languages » in *Interval mathematics 1980'*, pp 267-279, K. Nickel ed., Academic Press, 1980

Dubois et Prade, *Théorie des Possibilités*, Masson, 1987.

Fischer H.,

Intervall-Arithmetiken für komplexe Zahlen. ZAMM 53, 1973, T190-T191.

Normbälle in der Intervallrechnung., ZAMM 54, 1974, T217-T218.

Über vektorielle Normen und den Zusammenhang mit Pseudometriken. ZAMM 54, 1974, T188-T189.

Fischer, H., Schäffler, S., Warsitz, H.: *Parameter estimation in linear regression models with stationary ARMA(p,q)-errors using automatic differentiation*. Yugoslav Journal of Operations Research 2, 1992, 55-68.

Fischer, H., Surkan, A.J.: *Implementation of Interval Arithmetic Using APL*. ACM - SIGPLAN - APL Quote Quad, Vol.6, Issue 1, 1975, 24-35.

Heinhold, J., Riedmüller, B., Fischer, H.: *Aufgaben und Lösungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie,* Teil 1. Carl Hanser Verlag, München, editions 1970 / 74 /77.

Heinhold, J., Riedmüller, B., Fischer, H.: *Aufgaben und Lösungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie, Teil 2.* Carl Hanser Verlag, München, edition 1971 / 77 / 81.

Herzberger J., ed., *Wissenschaftliches Rechnen - Eine Einführung in das Scientific Computing*, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

Moore R.E., *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

Moore R.E. ed., *Reliability in computing : The role of interval mathematics in scientific computing*, Perspectives in computing, n°39, Academic press.

Neumaier A., *Interval methods for systems of equations,* Encyclopedia of mathematics and its applications n°37, Cambridge university press, 1990

Nickel K., ed., *Interval Mathematics,* Proceedings of the International Symposium Karlsruhe, May 20-24, 1975, Lecture Notes in Computer Science n°29, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

Nickel K. ed., *Interval mathematics 1980*, Academic Press, 1980

Nickel K., ed., *Interval Mathematics 1985,* Lecture Notes in Computer Science n° 212, Springer-Verlag, Berlin, 1986.